Διάλεξη 1η

# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

08/10/2019



**Ορισμός:** Έστω μια συνάρτηση $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Η $d$ καλείται μετρική, αν πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in X$

ii) $d(x,x) = 0$, $\forall x \in X$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$

iv) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $\forall x,z \in X$

**π.χ.:** Έστω $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = |x-y|$.

Και η $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \overset{\text{αν-ν}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ τ.ω $\forall x \in X$ με $d(x,x_0) < \delta$, να ισχύει: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (1)

Αν ισχύει η σχέση (1) τότε η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$

- Ένας χώρος $X$ ~~εφοδιασμένος~~ με μια μετρική $d$, καλείται μετρικός χώρος και συμβολίζεται με $(X,d)$.

- Θα συναντάμε συχνά το: $\{A_i\}_{i \in I}$, $A_i \subseteq X$.

  **π.χ.:** $\{A_1, A_2\}$ τότε $I = \{1,2\}$.

  $\{A_t, t \in [0,2]\}$ τότε $I = [0,2]$.

Επίσης θα συναντάμε το: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, \text{ τ.ω } x \in A_i\}$

**π.χ.:** $\bigcup_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Όμοια και για την τομή

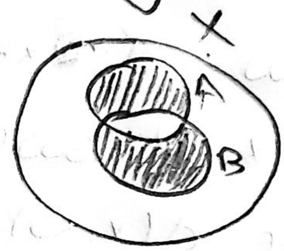
Ισχύει ότι: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in X : x\in A_i,\ \forall i\in I\}$

→ Έστω $A, B \subseteq X$.

Τότε $A\setminus B = \{x : x\in A,\ x\notin B\} = A\cap B^c$ →

$A^c = X\setminus A$

$A \triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$



▶ **Τύποι De Moivre:**

i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$

ii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$

iii) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

iv) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

▶ Όταν λέμε ότι $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ξένων ανά 2 συνόλων, αν $A_i\cap A_j=\emptyset$ $\forall i,j\in I$ με $i\neq j$.

**Ορ**: Έστω ο μ.χ. $X$. Το δυναμοσύνολο $P(X)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $X$. Δηλαδή $P(X)=\{A,\ A\subseteq X\}$

<u>**Ορ**</u>: Έστω $f: A \to B$, $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$.
Εικόνα του $C$ μέσω της $f$ $\stackrel{\text{είναι}}{=}$ $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$

Αντίστροφη εικόνα του $D$ μέσω της $f$ είναι:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

<u>**Πρόταση:**</u> Έστω $C_1 \subseteq C$, $D_1 \subseteq D$, τότε $f(C_1) \subseteq f(C)$ και $f^{-1}(D_1) \subseteq f^{-1}(D)$

<u>**Θεώρημα:**</u> Αν $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $A$ και $\{B_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $B$ και $f: A \to B$. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

v) Έστω $D \subseteq B$, τότε $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$.

<u>**Απόδ**</u>

i) Έστω $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Rightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, τ.ω $y = f(x)$

$\Rightarrow \exists x \in A$ και $\exists i \in I$, τ.ω $x \in A_i$ και $y = f(x)$.

$\Rightarrow \exists i \in I$, τ.ω $y \in f(A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

$\Rightarrow f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

Έχω ότι $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \quad , \forall j\in I \Rightarrow$

$f(A_j) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i) \quad , \forall j \in I \Rightarrow$

$\bigcup_{j\in I} f(A_j) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ $\boxed{+}$

ii) Έστω ισχύει ότι $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j \quad , \forall j \in I$

$\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq f(A_j) \quad , \forall j\in I$

$\Rightarrow f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{j\in I} f(A_j)$ $\boxed{+}$. Η ισότητα ισχύει ανν η f είναι "1-1".

iii) Έστω $x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \Rightarrow \exists y \in \bigcup_{i\in I} B$ τ.ω $y=f(x)$

$\Rightarrow \exists j \in I , \exists y \in B_j$ τ.ω $y=f(x)$

$\Rightarrow \exists j \in I$ τ.ω $x\in f^{-1}(B_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ (1)

Έχω ότι $\forall j \in I \quad , B_j \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow f^{-1}(B_j) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i), \forall j\in I$

$\Rightarrow \bigcup_{j\in I} f^{-1}(B_j) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{j\in I} B_j)$ (2)

Από (1) κ' (2): $\quad f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

Όμοια αποδεικνύονται τα iv, v.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Τότε $f([0,1]) = [0,1]$, $f([-1,0]) = [0,1]$

$f([0,1] \cap [-1,0]) = f(\{0\}) = \{0\}$

$f([0,1]) \cap f([-1,0]) = [0,1] \cap [0,1] = [0,1]$.

και αφού $f([0,1] \cap [-1,0]) = \{0\} \subseteq [0,1]$

$\Rightarrow f([0,1] \cap [-1,0]) \subseteq f([0,1]) \cap f([-1,0])$.

<u>Υπενθύμιση</u>: • $f: A \to B$, 1-1, αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ να ισχύει: $x_1 = x_2$.

• $f: A \to B$, $g: C \to D$, όπου $f(A) \subseteq C$, τότε ορίζεται η $g \circ f: A \to D$, με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$.

• $f$ επί, αν $f(A) = B \iff \forall y \in B, \exists x \in A$ με $y = f(x)$.

▸ Αν $f: A \to B$ 1-1 και επί, τότε $\exists!$ (μοναδικό) $g: B \to A$ τ.ω $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$, με

$id_A: A \to A$ και $id_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

Η $g$ λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της $f$.

Συμβολίζεται με $g = f^{-1}: B \to A$.

Ισχύει : $(f^{-1})^{-1} = f$

(*) Αν $\exists$ η $f^{-1}$, τότε η εικόνα του $C \subseteq B$ μέσω της $f^{-1}$ ισούται με την αντίστροφη εικόνα του $C$ μέσω της $f$, $(f^{-1}(C))$

▶ **Καρτεσιανό γινόμενο:** Έστω $A_1 \times \dots \times A_k =$
$\{(x_1, \dots, x_k) : x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}$

Αν ορίσω την $f : \{1, \dots, k\} \to \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ τ.ω
$f(1) \in A_1$, $f(2) \in A_2$, ..., $f(k) \in A_k$.

Τότε $A_1 \times \dots \times A_k \equiv \{f : \{1, \dots, k\} \to \bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid f(i) \in A_i, i = 1, \dots, k\}$

**Ορ:** Αν ισχύει: $\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \forall i \in I\}$

τότε η $f$ ονομάζεται συνάρτηση επιλογής.

**Αξίωμα επιλογής:** $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

**Διμελείς σχέσεις:**

$R \subseteq X \times X$ ($R$ διμελής σχέση πάνω στο $X$)

$xRy$ αν-ν $(x, y) \in R$.

Το $R$ λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν:
i) $xRx$, $\forall x \in X$ (ανακλαστική)
ii) $xRy \Rightarrow yRx$, $\forall x, y \in X$ (συμμετρική)
iii) $xRy$, $yRz \Rightarrow xRz$, $\forall x, y, z \in X$ (μεταβατική)

**Κλάσεις ισοδυναμίας:** Για $x \in X$, $[x]_R = [x] = \{y \in X : xRy\}$

**Πρόταση:** Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την σχέση ισοδυναμίας, αποτελεί διαμέριση του $X$.

(*) $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι διαμέριση του $X$, αν:
i) $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ και ii) Αν $A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j$

## Απόδειξη Προτάσεως:

$\bigcup_{x\in X}[x] \subseteq X$. Έστω $x\in X \Rightarrow x\in[x] \Rightarrow x\in \bigcup_{x\in X}[x] \Rightarrow$

$X \subseteq \bigcup_{x\in X}[x] \Rightarrow X = \bigcup_{x\in X}[x]$.

Έστω $x,y\in X$ τ.ω $[x]\cap[y]\neq\emptyset \Longrightarrow$

$\exists z\in X$ τ.ω. $z\in[x]$ και $z\in[y] \Rightarrow zRx$ και $zRy$.

Όμως $zRy \Leftrightarrow yRz$ και επειδή η $R$ είναι μεταβατική

έχω ότι $xRy \Rightarrow y\in[x]$

Έστω τώρα $\omega R x \overset{yRx}{\Longrightarrow} \omega R y \Rightarrow \omega\in[y]$

και αφού $\omega R x \Leftrightarrow \omega\in[x]$ τότε έδειξα ότι $[x]\subseteq[y]$

Με τον ίδιο τρόπο ισχύει ότι $[y]\subseteq[x]$.

Άρα $[x]=[y]$

Υπωδίμιση: Σύνολο πηλίκο: $X/R = \{[x] : x\in X\}$

**Ορ:** Έστω $A,B$ δύο σύνολα. Τα $A,B$ λέγονται ισοσύνολα (έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων), αν $\exists f: A\to B$ 1-1 και επί.

**π.χ.** $A=\{x_1,\dots,x_k\}$, $B=\{y_1,\dots,y_n\}$

Αν $k<n$ τότε $\nexists$ επί συνάρτηση: $A\to B$

Αν $k<n$ τότε $\nexists$ επί συνάρτηση: $B\to A$.

Αν $k=n$: $f: A\to B$ με $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2,\dots,f(x_n)=y_n$

"1-1" και επί.

**Συμβολισμός:** Όταν $A,B$ ισοσύνολα, θα γράφω

$A\approx B$,

Προφανώς $A\approx A$.

Επίσης αν $A\approx B \Rightarrow B\approx A$,

αν $A\approx B \wedge B\approx C \Rightarrow A\approx C$.

$f: A\to B$: 1-1, επί

$g: B\to C$: 1-1, επί

τότε

$g\circ f: A\to C$: 1-1, επί

Άρα η $\approx$ είναι μία "σχέση ισοδυναμίας".

**Ορισμός:** Το $A$ είναι αριθμήσιμο αν $A \approx \mathbb{N}$

**Θεώρημα:** Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει κάποιο αριθμήσιμο υποσύνολο.

**Απόδ**

$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A$. Επίσης $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$.

άρα $\exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.

Επιπλέον $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$

$\dots \exists a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Ορίζω $B = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$.

**Αρχή καλής διάταξης:**

**Αξίωμα:** Κάθε υποσύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο

**Αρχή της επαγωγής:** Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες

i) $1 \in S$

ii) αν $n \in S$ τότε $n+1 \in S$

Τότε $S = \mathbb{N}$.

**Απόδ**

Έστω ότι $S \neq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$.

Άρα $\exists\, a = \min(\mathbb{N} \setminus S)$ και μάλιστα $a > 1$, διότι $1 \in S$

άρα $1 \notin \mathbb{N} \setminus S$. Αφού $a > 1$ τότε $a - 1 > 0$ άρα $a - 1 \in \mathbb{N}$.

Όμως $a - 1 \notin \mathbb{N} \setminus S$ γιατί το $a = \min(\mathbb{N} \setminus S)$.

Άρα $a - 1 \in S$. Όμως από υπόθεση (ii)

$a = (a-1) + 1 \in S$. **Άτοπο** από υπόθεση.